

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TES I PEMBINAAN TAHAP III CALON PESERTA IMO KE-52

Sabtu, 7 Mei 2011

Waktu : 270 menit (4,5 jam)

Kerjakan semua soal di lembar jawaban yang telah disediakan

Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat dan penggaris segitiga

Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah 7

1. Tentukan semua 4-tupel bilangan real (x, y, z, w) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{w^2} = 5 - \frac{1}{(xyzw)^2} \end{cases}$$

2. Pada suatu konferensi matematika, setiap pasang matematikawan saling kenal atau tidak saling kenal. Ketika makan siang, setiap matematikawan makan pada satu ruangan dari dua ruangan yang disediakan. Setiap matematikawan makan pada ruangan dimana dia mempunyai banyak teman sebanyak genap pada ruangan tersebut. Tunjukkan bahwa banyak cara untuk menempatkan matematikawan tersebut pada ruangan adalah bilangan dua berpangkat.
3. Misalkan M suatu titik di dalam segitiga ABC dan misalkan A', B' , dan C' merupakan kaki titik tinggi dari M ke garis BC, CA dan AB , berturut-turut. Tentukan titik M sedemikian hingga $\frac{MA' \cdot MB' \cdot MC'}{MA \cdot MB \cdot MC}$ maksimal.
4. Diberikan bilangan-bilangan asli a, b , dan c dengan sifat $\gcd(a, b) = 1$. Barisan $\{u_n\}$ didefinisikan dengan $u_0 = 0, u_1 = 1$ dan $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ untuk $n \geq 0$. Misalkan m adalah bilangan asli terkecil sehingga $c|u_m$, sedangkan n adalah sebarang bilangan asli sehingga $c|u_n$. Buktikan bahwa $m|n$.