

# TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TES I PEMBINAAN TAHAP III CALON PESERTA IMO KE-52

Sabtu, 7 Mei 2011

Waktu : 270 menit (4,5 jam)

---

*Kerjakan semua soal di lembar jawaban yang telah disediakan*

*Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat dan penggaris segitiga*

*Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah 7*

---

1. Untuk suatu bilangan bulat positif  $n$ , misalkan  $f_n(x)$  didefinisikan oleh

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n |x - k|.$$

Tentukan semua solusi dari pertidaksamaan  $f_n(x) < 41$  untuk setiap bilangan bulat positif dua digit  $n$  (dalam notasi desimal).

2. Tentukan limit untuk  $n$  menuju takhingga dari

$$\frac{\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} 3^k}{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} 3^k}.$$

3. Lingkaran  $\omega$  di dalam (*inscribed in*) segiempat  $ABCD$ , dimana garis  $AB$  dan  $CD$  tidak sejajar dan berpotongan di titik  $O$ . Lingkaran  $\omega_1$  menyinggung sisi  $BC$  di  $K$  dan menyinggung sisi  $AB$  dan  $CD$  di titik yang terletak di luar  $ABCD$ ; lingkaran  $\omega_2$  menyinggung sisi  $AD$  di  $L$  dan juga menyinggung garis  $AB$  dan  $CD$  di titik-titik yang terletak di luar  $ABCD$ . Jika  $O, K, L$  kolinier, tunjukkan bahwa titik tengah  $BC$ , titik tengah  $AD$ , dan juga titik pusat  $\omega$  kolinier.
4. Buktikan bahwa terdapat tak hingga banyak bilangan asli  $n$  sedemikian hingga  $n^2 + 1$  mempunyai pembagi prima yang lebih besar dari pada  $2n + \sqrt{5n + 2011}$ .