

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TES III PEMBINAAN TAHAP III CALON PESERTA IMO KE-52

Sabtu, 21 Mei 2011

Waktu : 270 menit (4,5 jam)

Kerjakan semua soal di lembar jawaban yang telah disediakan

Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat dan penggaris segitiga

Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah 7

1. Misalkan \mathbb{Q}^+ menyatakan semua bilangan rasional positif. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$ yang memenuhi kedua sifat berikut:
 - (i) $f(x)$ bulat jika dan hanya jika x bulat
 - (ii) $f(f(xf(y)) + x) = yf(x) + x$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}^+$
2. Diberikan sebuah garis lurus l ; pada l terdapat tiga titik A, B dan C dimana B terletak diantara A dan C . Andaikan $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ berturut-turut menyatakan lingkaran dengan diameter AC, AB dan BC ; BD tegak lurus l dengan D terletak pada Γ_1 . Lingkaran-lingkaran $\Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ dan Γ_7 mempunyai kondisi sebagai berikut :
 - Γ_4 menyinggung Γ_1 dan Γ_2 serta BD
 - Γ_5 menyinggung Γ_1 dan Γ_3 serta BD
 - Γ_6 menyinggung Γ_1 di dalam, serta menyinggung Γ_2 dan Γ_3 di luar.
 - Γ_7 melalui titik B dan titik singgung-titik singgung dari : Γ_2 dengan Γ_6 serta Γ_3 dengan Γ_6Buktikan bahwa lingkaran-lingkaran Γ_4, Γ_5 dan Γ_7 kongruen. Jawaban harus disertai gambar.
3. Diketahui sebuah papan terdiri dari $n \times n$ kotak satuan ($n \geq 3$). Setiap kotak satuan pada papan tersebut diwarnai hitam dan putih seperti papan catur. Dalam satu kali langkah TOMI dapat memilih sembarang persegi yang terdiri dari 2×2 kotak satuan dan mengganti warna setiap kotak yang terpilih dengan warna sebaliknya (hitam menjadi putih dan putih menjadi hitam). Tentukan semua n sehingga setelah sejumlah berhingga langkah semua kotak satuan pada papan tersebut berwarna sama.
4. Diberikan $N = 2^a p_1 p_2 \cdots p_m, m \geq 1$ dengan a bilangan asli dan p_1, p_2, \cdots, p_m adalah bilangan-bilangan prima berbeda. Misalkan diketahui bahwa $\sigma(N) = 3N$ dengan $\sigma(N)$ menyatakan jumlah semua faktor positif dari N . Buktikan bahwa terdapat bilangan prima p sehingga $2^p - 1$ juga merupakan bilangan prima dan $2^p - 1 | N$.