

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TES IV PEMBINAAN TAHAP III CALON PESERTA IMO KE-52

Senin, 23 Mei 2011

Waktu : 270 menit (4,5 jam)

Kerjakan semua soal di lembar jawaban yang telah disediakan

Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat dan penggaris segitiga

Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah 7

1. Cari semua bilangan real x yang dapat ditulis sebagai

$$x = \frac{a_0}{a_1 a_2 \cdots a_n} + \frac{a_1}{a_2 a_3 \cdots a_n} + \frac{a_2}{a_3 a_4 \cdots a_n} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

dengan n, a_1, a_2, \dots, a_n bilangan asli dan $1 = a_0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n$

2. Misalkan n adalah bilangan bulat dengan $n \geq 3$ dan $T_1 T_2 \cdots T_n$ adalah segi- n beraturan. Tiga titik berlainan $T_i T_j T_k$ dipilih secara acak. Tentukan probabilitas segitiga $T_i T_j T_k$ adalah segitiga lancip
3. Diberikan lingkaran Γ dengan diameter AB . Melalui titik A dibuat garis singgung l dan melalui titik B dibuat garis singgung m . Andaikan C suatu titik pada l , $C \neq A$, dan misalkan pula q_1 dan q_2 dua garis yang ditarik dari titik C . Jika q_i memotong lingkaran Γ di titik D_i dan E_i (D_i terletak antara C dan E_i) untuk $i = 1, 2$. Garis-garis AD_1, AD_2, AE_1, AE_2 memotong garis singgung m berturut-turut di titik M_1, M_2, N_1, N_2 . Buktikan bahwa $M_1 M_2 = N_1 N_2$. Jawaban harus disertai gambar
4. Bilangan prima p dikatakan **moderat** jika memenuhi untuk setiap dua bilangan bulat positif $k > 1$ dan m , dapat ditemukan k bilangan bulat positif n_1, n_2, \dots, n_k sehingga

$$n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_k^2 = p^{k+m}$$

Jika q bilangan **moderat** terkecil, maka tentukan bilangan prima terkecil r yang tidak moderat dan $q < r$