

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TES V PEMBINAAN TAHAP III CALON PESERTA IMO KE-52

Selasa, 24 Mei 2011

Waktu : 270 menit (4,5 jam)

Kerjakan semua soal di lembar jawaban yang telah disediakan

Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, busur derajat dan penggaris segitiga

Skor maksimal untuk masing-masing soal adalah 7

1. Misalkan a, b, c sisi-sisi segitiga dengan $abc = 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{\sqrt{b+c-a}}{a} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{b} + \frac{\sqrt{a+b-c}}{c} \geq a+b+c$$

2. Suatu graf G dengan n simpul (vertex) disebut bagus jika setiap simpul dapat diberi label dengan bilangan bulat positif berbeda yang tidak lebih dari $\lfloor n^2/4 \rfloor$ sehingga terdapat suatu himpunan bilangan bulat taknegatif D dengan sifat: terdapat suatu busur (edge) antara dua simpul jika dan hanya jika selisih labelnya ada di D . Buktikan terdapat suatu bilangan asli N sehingga untuk setiap $n \geq N$, terdapat graf tidak bagus dengan n simpul
3. Diberikan segitiga-segitiga ABC dan PQR dengan dua kondisi berikut
(i) P titik tengah BC dan A titik tengah QR
(ii) QR garis bagi $\angle BAC$ dan BC titik tengah $\angle QPR$
Buktikan bahwa $AB + AC = PQ + PR$. Jawaban harus disertai gambar
4. Diberikan sebarang bilangan prima $p > 2011$. Misalkan n suatu bilangan bulat sehingga p membagi $n^4 - 2n^2 + 9$. Buktikan bahwa terdapat bilangan asli a, b dan c sehingga p membagi $24an^2 + 5bn + 2011c$ dengan a, b, c tidak semuanya habis dibagi p .